Μελέτη Μετασχηματισμών Συντεταγμένων και Δυναμικών Συστημάτων σε Δύο Διαστάσεις και Απεικονίσεις με Σύστημα Σωματιδίων στην Javascript

Συμμετέχοντες μαθητές: Αθανασοπούλου Ευαγγελία, Ζέλιος Σπυρίδων, Κάκκου Πολυτίμη, Καρναχωρίτη Φρειδερίκη, Κατσούδα Δήμητρα, Κουτσούρη Γεωργία, Μίχος Ιωάννης, Μπούζας Αλέξανδρος, Παπαδοπούλου Γεωργία, Πιέρρου Ασπασία, Πολονύφη Μαγδαληνή, Σάββα Ιωάννα, Χριστιά Ευανθία

Υπεύθυνοι Εκπαιδευτικοί: Δερμιτζιώτη Ευγενία, ΠΕ03, (tzoggoa@gmail.com), Κουμπαρούλη Δήμητρα, ΠΕ86, (dkoymp@hotmail.com), Παπαδημητρίου Γεώργιος, ΠΕ04.01, (gpapadem@gmail.com)

Σχολείο: Γυμνάσιο Αντιρρίου, Αντίρριο Αιτωλ/νίας 30020

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ευρεία χρήση λογισμικών περιήγησης και η δυνατότητα της γλώσσας προγραμματισμού javascript να δημιουργεί προγράμματα τα οποία εκτελούνται σε αυτούς, επιτρέπει την εύκολη ανάπτυξη εφαρμογών σε ευρύ πεδίο θεμάτων. Σε συνδυασμό με την πρόσβαση στο στοιχείο canvas της HTML5 και τη δημιουργία γραφικών και κινούμενων απεικονίσεων (animation), η γλώσσα javascript μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση φυσικών συστημάτων αλλά και την οπτικοποίηση μαθηματικών σχέσεων ή συναρτήσεων.

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε την δημιουργία λογισμικού σε javascript με στόχο την οπτικοποίηση μετασχηματισμού συντεταγμένων και δυναμικών συστημάτων δύο διαστάσεων, καθώς και την μελέτη διάφορων τέτοιων συστημάτων τα οποία παρουσιάζουν χαοτική συμπεριφορά, ή σχεδόν χαοτική συμπεριφορά. Κατά τη διαδικασία της εκμάθησης της γλώσσας javascript και των σελίδων HTML αναπτύξαμε απλούστερες εφαρμογές, σχετιζόμενες με τα μαθηματικά του Γυμνασίου, όπως η επίλυση γενικών εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού, η περιστροφή ημιευθείας μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων και η κίνηση σωματιδίων όπως αυτή σε ένα πυροτέχνημα.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Μαθηματικά, Δυναμικά Συστήματα, Χάος, Javascript*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εισαγωγή στα ελληνικά σχολεία των Τεχνολογιών Πληροφορικής και Επικοινωνιών (ΤΠΕ) και η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών προσφέρει νέες οδούς για την οικοδόμηση της γνώσης και την ενίσχυση της μαθησιακής εμπλοκής των μαθητών στην διδακτική διαδικασία, αν και με περιορισμένη αξιοποίηση στην πράξη (Καρατράντου & Παναγιωτακόπουλος, 2013). Διάφορα μοντέλα χρήσης λογισμικών έχουν δοκιμαστεί, όπως η γλώσσα LOGO (Τσοβόλας & Αντωνίου, 2005), το λογισμικό MicroWorlds Pro (Glezou & Grigoriadou, 2010) και το αντίστοιχο πακέτο ρομποτικής EX Robotics (Νικολός κ.ά., 2008), ειδικά πακέτα λογισμικού για πειραματικές διαδικασίες (Πιερρή κ.ά. 2005), η χρήση Java applets για προσομοίωση φυσικών συστημάτων και πειραμάτων (Ταραμόπουλος, κ.ά., 2010) αλλά και διαφόρων άλλων λογισμικών και γλωσσών προγραμματισμού όπως η Python και τα Jupyter Notbooks (π.χ.: https://gpapadem.sites.sch.gr/tag/python/).

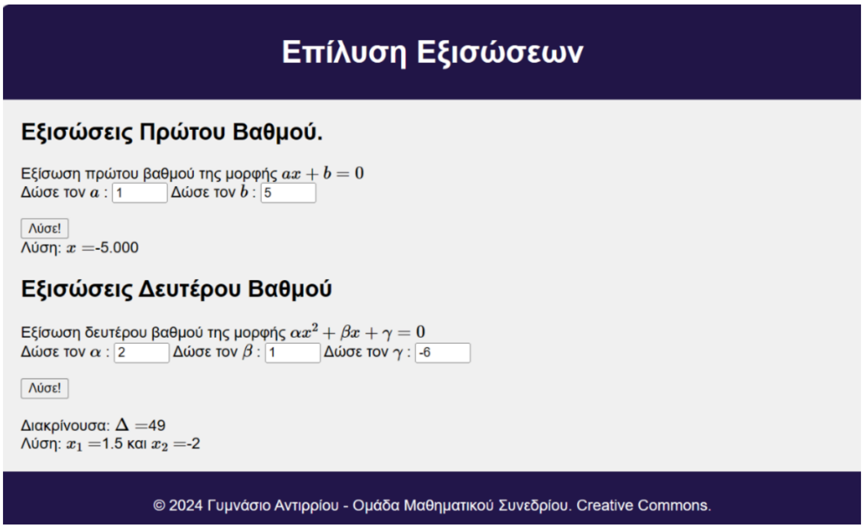
Εδώ χρησιμοποιήσαμε την γλώσσα javascript για να αναπτύξουμε μία σχετικά απλή εφαρμογή η οποία, χρησιμοποιώντας ένα σύστημα σωματιδίων, μας απεικονίζει σε δύο διαστάσεις και σε πραγματικό χρόνο τις τροχιές δυναμικών συστημάτων, διακριτών και συνεχών, και μας επιτρέπει να εξερευνήσουμε την ομορφιά τους, αλλά και την πολυπλοκότητα και τη χαοτική συμπεριφορά τους.

Η θεωρία του χάους είναι ένας, σχετικά νεαρός, μαθηματικός τομέας με πολλές εφαρμογές στη φυσική, τα οικονομικά, την κρυπτογραφία, τη μηχανική και πολλές άλλες επιστήμες. Ως χαοτικό ορίζουμε ένα δυναμικό σύστημα, συνεχές ή διακριτό, το οποίο είναι εξαιρετικά ευαίσθητο στις αρχικές συνθήκες, έτσι ώστε μία μικρή αλλαγή σε αυτές να επιφέρει τεράστιες αλλαγές στη μελλοντική του πορεία (Peitgen et al., 2004). Ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να είναι πλήρως αιτιοκρατικό (ντετερμινιστικό), όμως η εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες να καθιστά τη μελλοντική του πορεία αδύνατο να προβλεφθεί, φαινόμενο που αναφέρεται ως *ντετερμινιστικό χάος*. Παραδείγματα τέτοιων φυσικών συστημάτων με χαοτική συμπεριφορά είναι ο καιρός, το πρόβλημα των τριών σωμάτων που αλληλοεπιδρούν βαρυτικά (γνωστό άλυτο πρόβλημα ήδη από την εποχή του Νεύτωνα) και τα οικονομικά συστήματα.

Η γλώσσα προγραμματισμού javascript δημιουργήθηκε από τον Brendan Eich της εταιρίας Netscape και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1995 στο πρόγραμμα περιήγησης ιστού Netscape Navigator 2.0 (Wirfs-Brock & Eich, 2020). Πρόκειται για μία διερμηνευόμενη γλώσσα προγραμματισμού επηρεασμένη στην σύνταξη από την C, η οποία μπορεί να αλλάζει δυναμικά το περιεχόμενο του εγγράφου ενός περιηγητή ιστού (browser), ενώ εκτελείται τοπικά στον υπολογιστή του χρήστη. Έχει εξελιχθεί σε μία αρκετά ευέλικτη και γρήγορη γλώσσα, με αντικειμενοστραφές αλλά και συναρτησιακό στυλ προγραμματισμού. Η ευκολία ανάπτυξης προγραμμάτων, η δυνατότητά της να εκτελείται σε κάθε υπολογιστή μέσω εφαρμογών περιήγησης, αλλά και οι δυνατότητές της στα μαθηματικά και σε 2D και 3D γραφικά, την καθιστούν ιδανικό εργαλείο για χρήση στην εκπαίδευση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η Ομάδα του Μαθητικού Μαθηματικού Συνεδρίου (ΟΜΜΣ) του Γυμνασίου Αντιρρίου συστάθηκε στην αρχή της σχολικής χρονιάς και οι συναντήσεις της γίνονταν κυρίως μέσω της πλατφόρμας webex κάθε Σαββατοκύριακο, αλλά και κατά τη διάρκεια του σχολικού ωραρίου σε κενές ώρες, όταν ήταν δυνατό. Δημιουργήσαμε μία ιδιωτική κυψέλη στην πλατφόρμα e-me, στον κοινόχρηστο φάκελο της οποίας ανεβάζαμε όλα τα αρχεία και άρθρα που χρησιμοποιούσαμε, τους κώδικες HTML και javascript που αναπτύσσαμε, ενώ χρησιμοποιούσαμε το forum της πλατφόρμας για επικοινωνία.

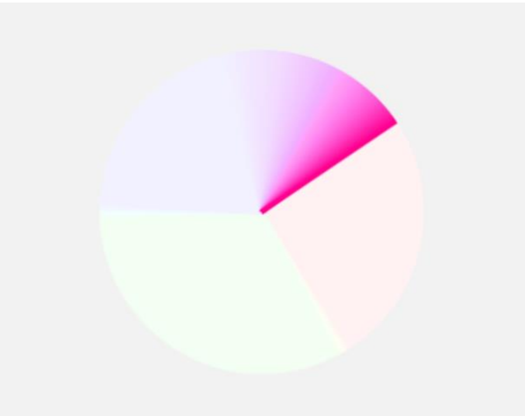


Εικόνα 1*: Η εφαρμογή Equations όπως φαίνεται σε κάποιον browser.*

Αρχικά, προκειμένου να εξοικειωθούμε με την σύνταξη και την δομή της javascript και των αρχείων HTML, ξεκινήσαμε με μία απλή εφαρμογή επίλυσης εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού (**Εικόνα 1**) με την βοήθεια και την καθοδήγηση των καθηγητών της ομάδας. Αυτό ήταν απαραίτητο μιας και εμπλέκονταν μαθητές και από τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου. Σκοπός της εφαρμογής ήταν πρωτίστως να μάθουμε τα στοιχεία εισόδου/εξόδου και ελέγχου της HTML, την εφαρμογή στυλ με αρχεία css, την διαχείρισή τους με την javascript, τις δομές ελέγχου ροής της γλώσσας, αλλά και να επαναλάβουμε τις γνώσεις μας στα μαθηματικά που διδασκόμαστε.

Το επόμενο βήμα ήταν η εξάσκηση στα γραφικά του στοιχείου canvas της HTML. Δημιουργήσαμε, προγραμματιστικά, κύκλους, ευθείες και παραλληλόγραμμα, διαφόρων μεγεθών και χρωμάτων, μαθαίνοντας το σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου canvas, την συνάρτηση Math.random() και τη δομή επανάληψης for της γλώσσας. Για την δημιουργία κινούμενων γραφικών – animation - χρησιμοποιήσαμε το βασικό animation loop της javascript με την συνάρτηση RequestAnimationFrame(). Μία πρώτη δοκιμή ήταν η περιστροφή μίας ημιευθείας γύρω από το ένα σημείο της (**Εικόνα 2**). Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει να γίνει χρήση των ημιτόνων και συνημιτόνων της γωνίας που σχηματίζει η ημιευθεία με τον άξονα $x'x$, προβάλλοντας πρακτικά το μήκος της ημιευθείας στους άξονες x και y, ενώ αυξάνουμε την γωνία με το κατάλληλο βήμα, αλλάζοντας και το χρώμα.

Για να αναπτύξουμε την ζητούμενη εφαρμογή των δυναμικών συστημάτων χρειαζόμασταν ένα ακόμα κρίσιμο στοιχείο: κινούμενα σημεία, τα οποία θα ακολουθούν (ή θα σχηματίζουν) τις τροχιές του συστήματος. Αυτά πρέπει να είναι *αντικείμενα* (objects), έτσι ώστε το καθένα να ακολουθεί την δική του πορεία. Επομένως χρειάστηκε να μάθουμε τα απολύτως απαραίτητα του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού (object oriented programing) στην javascript. Φτιάξαμε ένα απλό animation όπου κάνοντας ένα κλικ με το ποντίκι σε κάποιο σημείο του canvas δημιουργούνταν ένα πλήθος σημείων το καθένα με την δική του τυχαία ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση και το δικό του χρώμα. Κάθε σημείο ακολουθούσε την τροχιά του, σχηματίζοντας κάτι σαν πυροτέχνημα.



***Εικόνα 2**: Περιστρεφόμενη ημιευθεία με αλλαγή χρωμάτων και βήμα γωνίας 1^o*

Η τελική εφαρμογή χρησιμοποιεί μία κλάση σημειακών αντικειμένων (Class Particle στη javascript) που εμφανίζονται όταν κάνουμε κλικ στην οθόνη (canvas) ή όταν κάνοντας κλικ σύρουμε το ποντίκι. Κάθε σημείο διατηρεί τις αρχικές συντεταγμένες της δημιουργίας του και μετά ακολουθεί τις δεδομένες εξισώσεις για το x και το y για να ανανεώσει τις συντεταγμένες του. Αν πρόκειται για συνεχές δυναμικό σύστημα, δηλαδή αν οι εξισώσεις για το x και το y θεωρηθούν ως χρονικές παράγωγοι ($\dot{x}$ και $\dot{y}$), τότε χρησιμοποιείται η μέθοδος forward Euler για τον υπολογισμό του επόμενου σημείου της τροχιάς: $x(t+dt) = x(t) + \dot{x}(t)dt$ και αντίστοιχα για το y. Επίσης, επιλεγόμενη εσωτερικά στο πρόγραμμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξης σταθερού βήματος (RK4), η οποία προσφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια χωρίς εμφανή μείωση της απόδοσης.

Για την εισαγωγή των εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε το πακέτο **mathjs** (ελεύθερο και ανοιχτού κώδικα λογισμικό) και συγκεκριμένα ο parser για μετατροπή της συμβολοσειράς της συνάρτησης που εισάγει ο χρήστης σε εσωτερική συνάρτηση της javascript κατά την εκτέλεση του προγράμματος. Επίσης χρησιμοποιήθηκε το πακέτο **MathJax** ώστε να εμφανίζει σωστά τις μαθηματικές εξισώσεις στην ιστοσελίδα χρησιμοποιώντας το σύστημα *LaTeX*. Ο χρήστης εισάγει τις εξισώσεις για το x και το y σε τυπική μαθηματική γραφή για υπολογιστές, χρησιμοποιώντας και όλες τις διαθέσιμες μαθηματικές συναρτήσεις της javascript, αν το επιθυμεί. Επίσης, επιλέγει το αν οι εξισώσεις θεωρούνται ως μετασχηματισμοί συντεταγμένων (διακριτό σύστημα) ή ως παράγωγοι (συνεχές σύστημα) έτσι ώστε να χρησιμοποιείται ο κατάλληλος κώδικας στην javascript. Επίσης ο χρήστης επιλέγει το μέγεθος των σωματιδίων, την διαφάνεια των σημείων (κάτι σαν μετείκασμα) και το χρονικό διάστημα dt της μεθόδου Euler (ή της RK4).

Χρησιμοποιήθηκε επίσης μία ακόμα εξωτερική βιβλιοθήκη, δημιουργημένη σε προηγούμενο χρόνο από έναν από τους εκπαιδευτικούς της ομάδας, η οποία χρησιμοποιεί ένα αντικείμενο (class CoordSystem) το οποίο μετατρέπει τις υποθετικές συντεταγμένες x και y, που φαίνονται στους άξονες στην οθόνη και χρησιμοποιούνται εσωτερικά στις συναρτήσεις, σε πραγματικές συντεταγμένες του στοιχείου canvas. Με αυτό το αντικείμενο μπορούμε επίσης να εστιάζουμε σε συγκεκριμένες συντεταγμένες (zoom in και out) και να μετακινούμε τους άξονες οριζόντια και κάθετα. Μετά από αυτό η εφαρμογή μας ήταν λειτουργική και μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη τροχιών διαφόρων δυναμικών συστημάτων. Ως τεστ χρησιμοποιήσαμε τον αρμονικό ταλαντωτή, ο οποίος όπως είναι γνωστό περιγράφεται από την εξίσωση $\ddot{x} = -\omega^2 x$, η οποία μπορεί να μετατραπεί σε δύο εξισώσεις πρώτης τάξης

$$\dot{x} = y \tag{1}$$
$$\dot{y} = -\omega^2 x \tag{2}$$

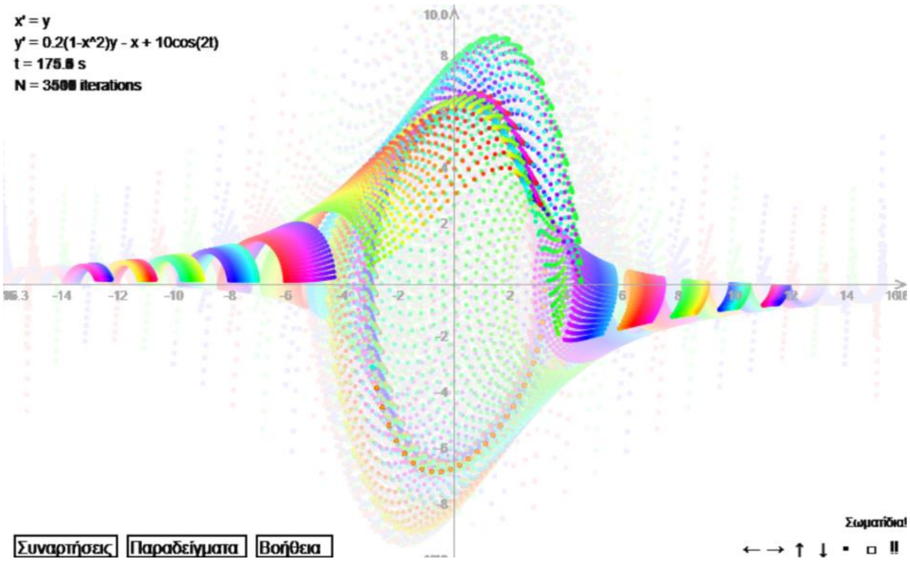
(Σε αυτή την περίπτωση η y συντεταγμένη είναι η ταχύτητα v και το x, y επίπεδο είναι ο χώρος των φάσεων). Αναμέναμε την γνωστή έλλειψη και πράγματι το τεστ ήταν επιτυχημένο και η εφαρμογή μας ήταν αξιόπιστη.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η εφαρμογή μας μπορεί να απεικονίσει την συμπεριφορά ενός μεγάλου πλήθους σωματιδίων (1000 συνολικά) καθιστώντας εμφανή την δυναμική των τροχιών του δεδομένου συστήματος. Οι κινούμενες εικόνες (animation) που παράγονται είναι ενδιαφέρουσες και ως έργα υπολογιστικής τέχνης. Ξεκινώντας με το εξαναγκασμένο σύστημα Van der Pol, με εξισώσεις (Βουγιατζής & Μελετλίδου, p125, 2015)

$$\dot{x} = y \tag{3}$$
$$\dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y + a\cos(\omega t) \tag{4}$$

παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία καταλήγουν σε ένα οριακό «κύκλο», μία κλειστή τροχιά στον χώρο των φάσεων (**Εικόνα 3**).



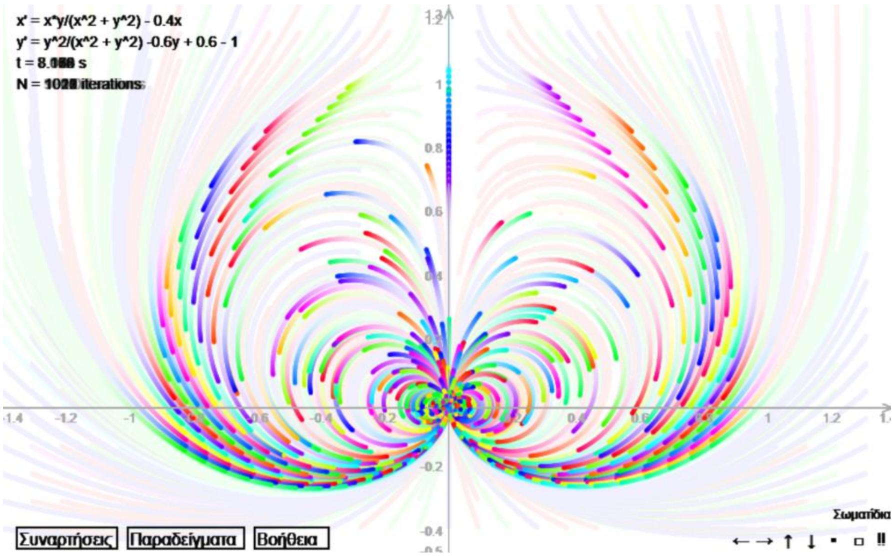
***Εικόνα 3**: Ταλαντωτής Van der Pol κατά το μεταβατικό στάδιο.*

Ένα άλλο συνεχές δυναμικό σύστημα είναι το σύστημα Dixon (Dixon et al., 1993) με εξισώσεις:

$$\dot{x} = \frac{xy}{x^2 + y^2} - ax \tag{5}$$

$$\dot{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} - \beta y + \beta - 1 \tag{6}$$

Το σύστημα αυτό προέκυψε από την ανάλυση του μαγνητικού πεδίο αστέρων νετρονίων και μοιάζει να παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά (**Εικόνα 4**), παρόλο που είναι ένα αυτόνομο συνεχές σύστημα διαφορικών εξισώσεων σε δύο διαστάσεις. Τέτοια συστήματα δεν είναι δυνατό να παρουσιάζουν πραγματικό (μαθηματικό) χάος (Seiler & Seiß, 2021), σύμφωνα με το θεώρημα Poincare-Bendixson (Βουγιατζής & Μελετλίδου, 2015). Το «χάος» που παρατηρούμε στην εικόνα προέρχεται από την αδυναμία των υπολογιστών να χειριστούν πραγματικούς αριθμούς με μέγιστη ακρίβεια, αλλά και τη μέθοδο ολοκλήρωσης (Euler ή RK4), με αποτέλεσμα να συσσωρεύονται λάθη και έτσι οι τροχιές να φαίνονται μη-κλειστές.



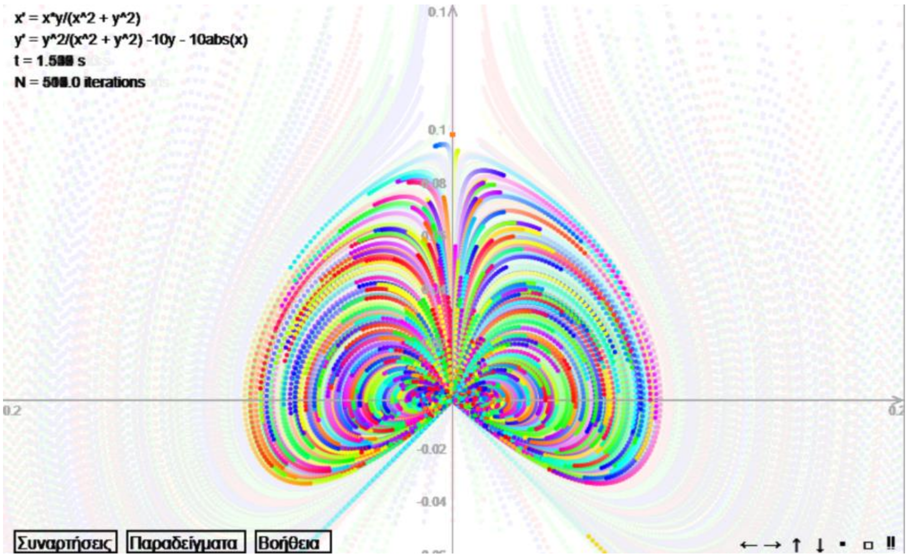
***Εικόνα 4**: Σύστημα Dixon με παραμέτρους α=0.4 και β=0.6*

Ένα παρόμοιο (Dixon like) σύστημα, μη-συνεχές όμως, έτσι ώστε να παρουσιάζει πραγματικό χάος, περιγράφεται από τους Rahman et al. (Rahman et al. 2022) και έχει εξισώσεις:

$$\dot{x} = \frac{xy}{x^2+y^2} \tag{7}$$

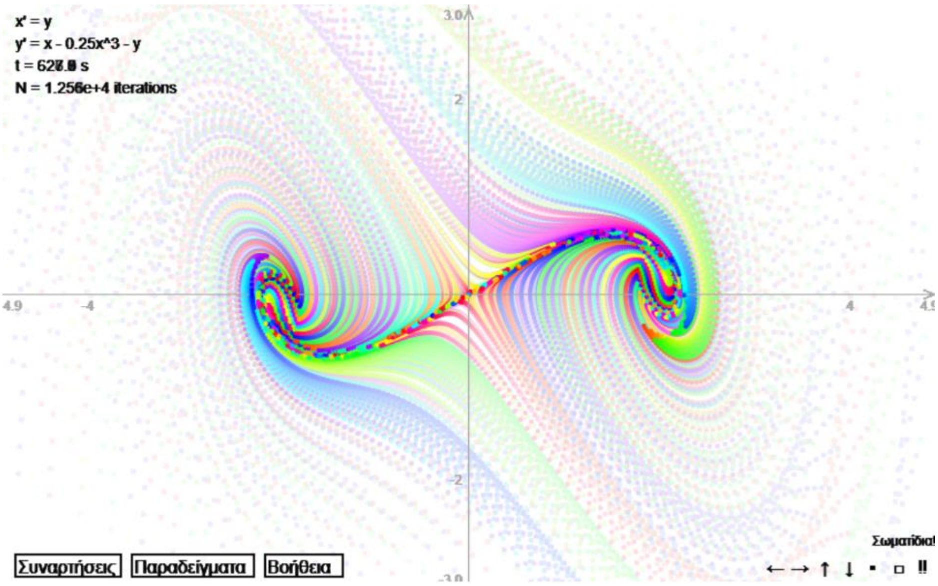
$$\dot{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} - \alpha y - \beta |x| \tag{8}$$

Η μορφή αυτού του συστήματος φαίνεται στην **Εικόνα 5** παρακάτω.



***Εικόνα 5**: Ένα μη-συνεχές σύστημα με πραγματικό χάος*

Μερικά συστήματα έχουν σημεία ισορροπίας, στα οποία καταλήγουν από οποιοδήποτε σημείο του χώρου των δύο διαστάσεων. Ένα τέτοιο απλό σύστημα φαίνεται στην **Εικόνα 6**, και αποτελεί ένα παράδειγμα όμορφης υπολογιστικής τέχνης!



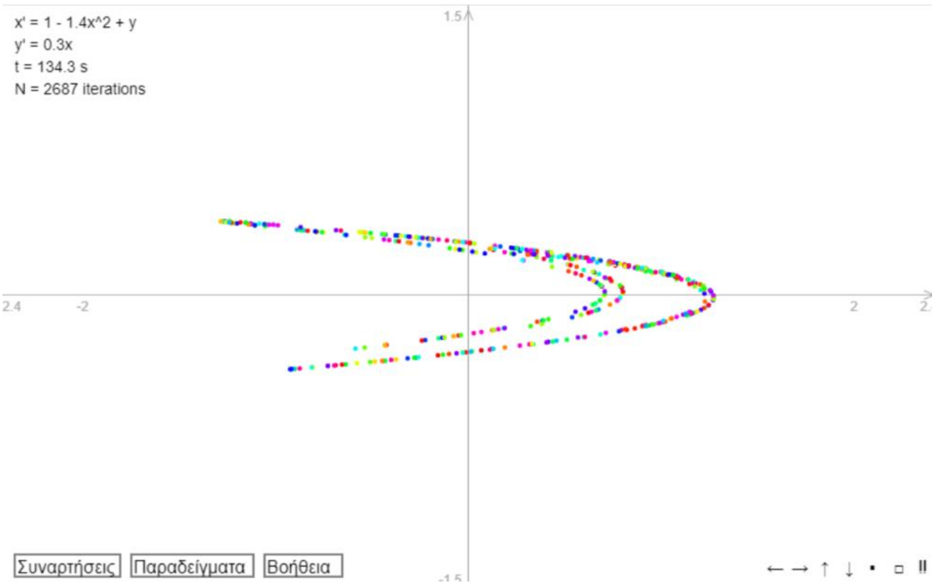
Εικόνα 6*: Η μεταβατική φάση ενός συστήματος με τρία σημεία ισορροπίας, δύο ευσταθή στο (-2,0) και (2,0) και ένα ασταθές στο (0,0). Οι εξισώσεις του συστήματος φαίνονται στην εικόνα.*

Συστήματα που παρουσιάζουν πραγματικό χάος σε μία και δύο διαστάσεις είναι τα διακριτά συστήματα, της μορφής $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$ και $y_{n+1} = g(x_n, y_n)$. Ένα παράδειγμα είναι η απεικόνιση Henon (Peitgen et al., 2004)

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \quad (9)$$

$$y_{n+1} = \beta x_n \quad (10)$$

Ο μετασχηματισμός αυτό για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων παρουσιάζει ένα *παράξενο ελκυστή* (strange attractor) (Peitgen et al., 2004), δηλαδή έναν οριακό «κύκλο» ο οποίος έχει χαρακτηριστικά μορφοκλασματικού (fractal), με αποτέλεσμα την απίστευτα μεγάλη πολυπλοκότητα του χάους. Ο εκλυστής του μετασχηματισμού Henon φαίνεται στην **Εικόνα 7.**



Εικόνα 7*: Η απεικόνιση Henon με παραμέτρους α=1.4 και β=0.3*

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ενασχόλησή μας με το παρόν θέμα έδειξε ότι είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί μία πραγματική γλώσσα προγραμματισμού από μαθητές του Γυμνασίου και από καθηγητές του σχολείου, έστω στα πλαίσια μίας υπέρβασης, για την καλλιέργεια ενδιαφερόντων πέρα από το τυπικό πρόγραμμα σπουδών και τη σύνθεση μαθηματικών, φυσικής και πληροφορικής.

Παρόλο που το θέμα ήταν αρκετά προχωρημένο, το ενδιαφέρον των μαθητών ήταν μεγάλο, η συνεργασία τους με τους υπεύθυνους καθηγητές ήταν άψογη και η προσπάθειά τους αξιέπαινη. Οι μαθητές αποδείχτηκαν ουσιαστικό μέλος αυτής της προσπάθειας και χωρίς αυτούς δεν θα είχαμε την παρότρυνση να προχωρήσουμε. Όπως είναι φυσικό οι μαθητές πειραματίστηκαν με το πρόγραμμα, εισάγοντας πλήθος εξισώσεων και παράγοντας μεγάλο αριθμό από εικόνες, οι οποίες είναι αδύνατο να χωρέσουν στο παρόν άρθρο. Τα γνωστά χαοτικά συστήματα Duffing, Gingerbread, Ikeda, Tinkerbell και Lorenz (σε δύο διαστάσεις) εντάχθηκαν ως παραδείγματα στο ίδιο το πρόγραμμα. Ο πηγαίος κώδικας είναι διαθέσιμος ως ελεύθερο λογισμικό ανοιχτού κώδικα με άδεια Gnu GPL v3 με copyright την Ομάδα Μαθητικού Μαθηματικού Συνεδρίου Αντιρρίου και θα γίνει ανάρτηση και στην επίσημη ιστοσελίδα του Γυμνασίου. Η ΟΜΜΣ θα διευρυνθεί και θα συνεχίσει την ενασχόλησή της με τον προγραμματισμό και τις εφαρμογές του στα μαθηματικά και στη φυσική και στο επόμενο σχολικό έτος, γιατί, ars longa vita brevis.

Τέλος ευχαριστούμε την οργανωτική επιτροπή του Συνεδρίου που μας έδωσε την αφορμή να ασχοληθούμε στον ελεύθερο χρόνο μας με ένα τόσο ενδιαφέρον, προχωρημένο και δημιουργικό θέμα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Allen Wirfs-Brock and Brendan Eich. (2020). 'JavaScript: The First 20 Years'. *Proc. ACM Program. Lang.*, 2020, Vol. 4, No. HOPL, Article 77

Dixon, D., Cummings, F. and Kaus, P. (1993), 'Continuous “chaotic” dynamics in two dimensions', *Physica D: Nonlinear Phenomena,*1993, vol **65,** No 1-2, pp. 109-116.

Glezou, K. and Grigoriadou, M. (2010), 'Engaging students of senior high school in simulation development', *Informatics in Education*, 2010, Vol. **9,** No. 1, pp. 37-62.

Peitgen, H.-O., Jurgens, H. and Saupe, D. (2004), *Chaos and Fractals*, New York, Εκδότης: Springer.

Rahman, Z.-A. S., Jasim, B. H. and Al-Yasir, Y. I. (2022), 'Chaotic dynamics in the 2d system of nonsmooth ordinary differential equations', *Iraqi Journal For Computer Science and Mathematics*, 2022, Vol. **3,** No. 2, pp. 8-17.

Seiler, W. M. and Seißs, M. (2021), 'No chaos in Dixon’s system', *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2021, Vol. **31,** No. 3, pp. 2150044.

Βουγιατζής, Γ. and Μελετλίδου, Ε. (2015), *Εισαγωγή στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα*, Αθήνα, Εκδότης: Kallipos.gr.

Καρατράντου Α. & Παναγιωτακόπουλος Χ. (2013), Αλληλεπιδράσεις των ΤΠΕ, της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας και των Θεωριών Οικοδόμησης της Γνώσης: Μια μελέτη περίπτωσης, Στο *Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»*, Πειραιάς.

Νικολός Δ., Καρατράντου Α. & Παναγιωτακόπουλος Χ. (2008), Αξιοποίηση του MicroWorlds EX Robotics για την κατανόηση βασικών δομών προγραμματισμού, Στο *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου Διδακτικής Πληροφορικής*, Πάτρα.

Πιερρή Ε., Καρατράντου Α. & Παναγιωτακόπουλος Χ. (2005), Μελέτη του φαινομένου της αλλαγής φάσης με τη χρήση συστήματος σύγχρονης διάταξης, Στο *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου «Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση»*. Θεσσαλονίκη.

Ταραμόπουλος, Α., Ψύλλος, Δ. & Χατζηκρανιώτης, Ε. Ε. (2010), Διδασκαλία ηλεκτρικών κυκλωμάτων με το εικονικό εργαστήριο και τα applets του Ανοικτού Μαθησιακού Περιβάλλοντος (ΑΜΑΠ), Στο *Πρακτικά 7ου Πανελλήνιο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»*, Κόρινθος.

Τσοβόλας, Σ. & Αντωνίου, Α. (2005), Το ρομπότ και η χελώνα, Στο *Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ*, pp. 686-694, Σύρος.